

具有无穷时滞的细胞神经网络的稳定性分析

钟守铭¹, 黄廷祝¹, 黄元清²

(11 电子科技大学应用数学系, 成都 610054; 21 四川轻化工学院电子工程系, 自贡 643033)

摘要: 本文研究了具有无穷时滞的细胞神经网络的全局吸引性问题. 利用常数变易法和不等式分析技巧, 给出了无穷时滞的细胞神经网络无平衡点时, 网络系统有吸引紧集的充分条件, 同时也给出了无穷时滞的细胞神经网络有平衡点时, 网络系统的平衡点全局渐近稳定的充分条件. 其结果推广了文[7, 8]的相应结果.

关键词: 细胞神经网络; 全局吸引; 无穷时滞; 稳定性

中图分类号: O231 **文献标识码:** A **文章编号:** 03722112 (2001) 0520626204

The Stability Analysis of Cellular Networks with Infinite Delay

ZHONG Shou2ming¹, HUANG Ting2zhu¹, HUANG Yuan2qing²

(11 Dept. Applied Mathematics UEST of China Chengdu 610054, China;

21 Dept. Electronic Engineering, CCLI of Sichuan, Sichuan Zigong 643033, China)

Abstract: Global attractivity of Cellular Networks with infinite delay is investigated. By making use of the method of variation of parameters and the method of inequality analysis, the conditions for attractivity are given to work out the sets of attractions when the systems do not have equilibria. If the equilibria exist, conditions for the equilibria to be global attractors are presented. The conditions are obtained by extending the results of paper [7, 8].

Key words: cellular networks; global attractivity; infinite delay; stability

1 引言

自从 L. O. Chua^[1, 2] 提出细胞神经网络(CNN)理论与应用以来, 由于其巨大的潜在应用前景, CNN 现以成为神经网络研究的新热点^[3, 4]. 文[5]首先引入了具有时滞的细胞神经网络(DCNN). P. P. Civaler 等^[6]指出, 对于具有时滞的细胞神经网络, 虽然在参数矩阵为对称矩阵且无时滞时是稳定的, 但适当选择时滞, 可使 DCNN 不稳定, 并且文[6]给出了在参数矩阵为对称矩阵时 DCNN 稳定的充分条件. 文[7, 8]取消了参数矩阵对称的限制, 也给出了 DCNN 稳定的充分条件. 然而, 这些研究均考虑了细胞神经网络有平衡点且细胞连接权为常数时的稳定性. 通常细胞神经网络连接权是 t 的函数, 因而系统可能没有平衡点, 人们自然会问, 是否存在一个紧集, 使得任意解最终都趋于这个紧集呢? 本文试图建立具有无穷时滞的变系数连接权细胞神经网络的全局吸引区域, 并给出当无穷时滞的细胞神经网络有平衡点时, 平衡点全局渐近稳定和全局一致渐近稳定的充分条件. 其结果推广了文[7, 8]的相应结果.

考虑如下具有无穷时滞的细胞神经网络为

$$C \frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R}x_i(t) + \sum_{j=1}^N [a_{ij}(t)f(x_j(t)) + b_{ij}(t)f(x_j(t - S_{ij}(t))) + c_{ij}(t) \int_0^t K_{ij}(t-s)f(x_j(s)) ds$$

$$+ E_{ij}(t)] + I_i(t) \quad t \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 N 为神经元的个数, $C > 0, R > 0$ 为电容和电阻, 它们都是常数, $x_i(t)$ 为第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量, $f(x_j)$ 表示第 j 个神经元在 t 时刻的输出, $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t), E_{ij}(t)$ 和 $I_i(t)$ 均为有界连续函数, $S_{ij}, K_{ij}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是连续函数, 并 $\int_0^t K_{ij}(t) dt = 1$. 神经元的输出与状态变量由如下分段线性函数来刻画:

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) \quad (2)$$

对任意 $t_0 \in \mathbb{R}^+$, 假设 CNN(1) 满足的初始条件为

$$x_i(t) = U_i(t), \quad t \in (-\infty, t_0], i = 1, 2, \dots, N$$

其中 $U_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 在 $(-\infty, t_0]$ 上连续, 并且满足

$$\sup_{t \in (-\infty, t_0]} |U_i(t)| < +\infty$$

设 S 是 \mathbb{R}^N 的一个紧子集, 用 S_E 来表示 S 的 E-邻域. 假设

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)^T$$

是一个常数向量, 则定义

$$\|x - x^*\|_E = \max_{1 \leq i \leq N} \{ \sup_{t \in (-\infty, t_0]} |U_i(t) - x_i^*| \} \quad (3)$$

将 CNN(1) 重写为

$$C \frac{d[x_i(t) - x_i^*]}{dt} = -\frac{1}{R}[x_i(t) - x_i^*] + \sum_{j=1}^N \{a_{ij}(t)[f(x_j(t)) - f(x_j^*)] + b_{ij}(t)[f(x_j(t - S_j(t))) - f(x_j^*)] + c_{ij}(t) \int_0^t K_{ij}(t-s)[f(x_j(s)) - f(x_j^*)] ds\} + L_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

其中

$$L_i(t) = -\frac{1}{R}x_i^* + \sum_{j=1}^N [(a_{ij}(t) + b_{ij}(t) + c_{ij}(t))f(x_j^*) + E_{ij}(t)] + I_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

定义 1 设 $S \subset R^N$ 是紧集, 如果对 $P \in (0, \infty)$, CNN(1) 的解最终进入 S , 则称 S 是 CNN(1) 的吸收区域.

定义 2 假设 x^* 是 CNN(1) 的平衡点, 如果对 $P \in (0, \infty)$, $v \in D$, 对 $P \in (0, \infty)$, 当 $\|U - x^*\| + t_0 < D$ 时, 有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| < E, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立, 则称 CNN(1) 的平衡点一致稳定.

定义 3 假设 x^* 是 CNN(1) 的唯一平衡点, 如果对 $P \in (0, \infty)$, $t_0 \in (0, \infty)$, 有常数 $d \in (0, 1)$, 使得

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \leq Fd + \|U - x^*\| + t_0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立和 $\|x_i(t) - x_i^*\| \leq \epsilon$ ($\forall \epsilon > 0$), $i = 1, 2, \dots, N$ 成立, 则称 CNN(1) 的平衡点全局渐近稳定.

定义 4 假设 x^* 是 CNN(1) 的唯一平衡点, 如果对 $P \in (0, \infty)$, $t_0 \in (0, \infty)$, 有常数 $d \in (0, 1)$, 使得

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \leq Fd + \|U - x^*\| + t_0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立, 并且对 $P \in (0, \infty)$, $P_H > 0$, $v \in T = T(E, H) > 0$, $P \in (0, \infty)$, 当 $\|U - x^*\| + t_0 < H$ 时, 有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| < E, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立, 则称 CNN(1) 的平衡点一致全局渐近稳定.

为了书写方便, 记

$$\|a_{ij}(t) + b_{ij}(t) + c_{ij}(t)\| = A_{ij}(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

2 主要结果

定理 1 CNN(1) 的解是有界的.

证明 对 CNN(1), 利用常数变易法, 注意到 $a_{ij}(t)$ 、 $b_{ij}(t)$ 、 $c_{ij}(t)$ 、 $E_{ij}(t)$ 和 $I_i(t)$ 均为有界连续函数, 容易证得 CNN(1) 的解是有界的.

定理 2 如果 CNN(4) 满足

B 存在平衡点 x^* , 即 $L_i(t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, N$;

$$C \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) < \frac{1}{R}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

则 CNN(1) 的平衡点 x^* 是一致稳定的.

证明 根据式(2), 易知

$$\|f(x_j) - f(x_j^*)\| \leq F \|x_j - x_j^*\|, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

由式(4)和(6)有

$$CD^+ \|x_i(t) - x_i^*\| \leq F - \frac{1}{R} \|x_i(t) - x_i^*\| + \sum_{j=1}^N [\|a_{ij}(t)\| \|x_j(t) - x_j^*\| + \|b_{ij}(t)\| \|x_j(t - S_j(t)) - x_j^*\|$$

$$+ \|c_{ij}(t)\| \int_0^t K_{ij}(t-s) \|x_j(s) - x_j^*\| ds], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

本文将证明, 对 $P \in (0, \infty)$, $v \in D = (0, \infty)$, $P \in (0, \infty)$, 当 $\|U - x^*\| + t_0 < D$ 时, 有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| < E, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立. 否则, 因为对 $P \in (0, \infty)$, $t_0 \in (0, \infty)$, 均有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \leq F + \|U - x^*\| + t_0 = D = E$$

成立, 所以存在 $t_1 > t_0$ 及某个 i , 使得

$$\|x_i(t_1) - x_i^*\| = E, \|x_j(t) - x_j^*\| = \begin{cases} < E, & 0 \leq t < t_1, j = i \\ F E, & 0 \leq t < t_1, j \neq i \end{cases}$$

从而有 $D^+ \|x_i(t_1) - x_i^*\| \leq 0$, 另一方面, 由式(7)及条件(7)有

$$CD^+ \|x_i(t_1) - x_i^*\| \leq F - \frac{1}{R} \|x_i(t_1) - x_i^*\| + \sum_{j=1}^N [\|a_{ij}(t_1)\| \|x_j(t_1) - x_j^*\| + \|b_{ij}(t_1)\| \|x_j(t_1 - S_j(t_1)) - x_j^*\| + \|c_{ij}(t_1)\| \int_0^{t_1} K_{ij}(t_1-s) \|x_j(s) - x_j^*\| ds] - \frac{1}{R} E + \sum_{j=1}^N [\|a_{ij}(t_1)\| + \|b_{ij}(t_1)\| + \|c_{ij}(t_1)\|] E = - \left[\frac{1}{R} - \sum_{j=1}^N A_{ij}(t_1) \right] E < 0$$

矛盾. CNN(1) 的平衡点 x^* 是一致稳定.

定理 3 如果 CNN(4) 满足

$$(1) \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) < \frac{D}{R}, \quad \text{其中 } D \in (0, 1) \text{ 是常数, } i = 1, 2, \dots, N;$$

$$(2) v \in m \in (0, \infty) \text{ 是常数, 使得 } \|L_i(t)\| < \left[\frac{1}{R} - \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) \right] m, \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - S_j(t)) = +\infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, N;$$

则集合

$$S = [x_1^* - m, x_1^* + m] \times \dots \times [x_N^* - m, x_N^* + m]$$

是 CNN(1) 的吸引区域.

证明 首先证明, 对 $P \in (0, \infty)$ 及 $P \in (0, \infty)$, 当 $\|U - x^*\| + t_0 < B$ 时, 有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| < B, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

对 $P \in (0, \infty)$ 成立.

类似于定理 2 的证明, 若式(8)不成立, 则存在 $t_1 > t_0$ 及某个 i , 使得

$$\|x_i(t_1) - x_i^*\| = B, \|x_j(t) - x_j^*\| = \begin{cases} < B, & 0 \leq t < t_1, j = i \\ F B, & 0 \leq t < t_1, j \neq i \end{cases}$$

从而有 $D^+ \|x_i(t_1) - x_i^*\| \leq 0$, 另一方面, 由式(4)及条件(1)、(2)有

$$CD^+ | x_i(t_i) - x_i^* | F - \left[\frac{1}{R} - \sum_{j=1}^N A_{ij}(t_1) \right] B + | L_i(t_i) |$$

$$F - \left[\frac{1}{R} - \sum_{j=1}^N A_{ij}(t_1) \right] (B - m) < 0$$

矛盾,故式(8)成立.

对 $P \in (0, \infty)$, 选择 $G = \frac{1-D}{4D}E$, 由于 $\int_0^1 K_{ij}(t) dt = 1$, 所以存在常数 $c > 0$, 使得

$$\int_0^1 K_{ij}(t) dt B F G$$

设 M 是满足 $m + E + MGE \leq B$ 的最小正整数, 可以证明, 存在 $t_k (k = 0, 1, \dots, M)$, 当 $t - t_0 < B$ 时, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | < m + E + (M - k)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

对 $P \in (t_k, t_{k+1})$ 成立.

利用归纳法, 当 $k = 0$ 时, 显然式(9)成立.

假设 $k (0 \leq k < M)$ 时, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | < m + E + (M - k)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

对 $P \in (t_k, t_{k+1})$ 成立.

今证 $k + 1$ 时, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | < m + E + (M - k - 1)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

对 $P \in (t_{k+1}, t_{k+2})$ 成立.

由条件()可知, 存在 $t > t_k$, 使得当 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 时, 有 $t - S_{ij}(t) \in (t_k, t_{k+1})$, 先证存在 $t_{k+1} \in (t, t_{k+1})$, 使得

$$| x_i(t_{k+1}) - x_i^* | < m + E + (M - k - 1)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

否则, 对 $P \in (t, t_{k+1})$ 及存在某个 i , 使得

$$| x_i(t) - x_i^* | \geq m + E + (M - k - 1)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

由式(10)和(13)有

$$| x_j(t) - x_j^* | < m + E + (M - k)GF + | x_i(t) - x_i^* | + G, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

对 $P \in (t, t_{k+1})$ 及 $P \in (t_{k+1}, t_{k+2})$ 成立, 因此, 由式(4)和(14)有

$$CD^+ | x_i(t) - x_i^* | F - \frac{1}{R} | x_i(t) - x_i^* | + | L_i(t) | + \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) \int_0^1 [| a_{ij}(t) | | x_j(t) - x_j^* | + | b_{ij}(t) | | x_j(t) - S_{ij}(t) | - x_j^* | + | c_{ij}(t) | (\int_0^t K_{ij}(t-s) | x_j(s) - x_j^* | ds + \int_0^1 K_{ij}(t-s) | x_j(s) - x_j^* | ds)]$$

$$F - \left[\frac{1}{R} - \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) \right] (| x_i(t) - x_i^* | - m)$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^N A_{ij}(t) GF - \frac{1-D}{R}E + \frac{2D-1-D}{4D}E = - \frac{1-D}{2R}E$$

从而有 $C | x_i(t) - x_i^* | F < C | x_i(t) - x_i^* | - \frac{1-D}{2R}E(t - t_0) y$

$-]$, $ty +]$

矛盾, 因此式(12)成立.

再证

$$| x_i(t) - x_i^* | < m + E + (M - k - 1)G, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

对 $P \in (t_{k+1}, t_{k+2})$ 成立. 否则, 存在 $t^* > t_{k+1}$ 及某个 i , 使得 $| x_i(t^*) - x_i^* | \geq m + E + (M - k - 1)G$, $D^+ | x_i(t^*) - x_i^* | \geq 0$ (16)

由式(10)和(16)有

$$| x_j(s) - x_j^* | < m + E + (M - k)GF + | x_i(t^*) - x_i^* | + G, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (t_k, t_{k+1})$ 成立, 因此, 类似于式(12)的证明有

$$CD^+ | x_i(t^*) - x_i^* | F - \frac{1-D}{2R}E < 0$$

矛盾, 故式(15)成立. 由归纳法可知, 式(9)成立.

在式(9)中取 $k = M$, 当 $t - t_0 < B$ 时, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | < m + E, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (t_M, \infty)$ 成立. 故定理 3 成立.

定理 4 如果 CNN(4) 满足

() 存在唯一的平衡点 x^* , 即 $L_i(t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, N$;

() $\sum_{j=1}^N A_{ij}(t) < \frac{D}{R}$, 其中 $D \in (0, 1)$ 是常数, $i = 1, 2, \dots, N$;

() $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - S_{ij}(t)) = +\infty, i, j = 1, 2, \dots, N$;

则 CNN(1) 的平衡点 x^* 是全局渐近稳定的.

证明 设 $d > 1$ 为任意常数, 对 $P \in (t_0, \infty)$, 利用定理 2 的证明方法可得

$$| x_i(t) - x_i^* | < d + U - x^* + t_0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (t_0, t_1)$ 成立, 让 $dy = 1$, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | F + U - x^* + t_0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

对 $P \in (t_0, t_1)$ 成立, 在定理 3 中取 $m = 0$, 可知定理 4 成立.

注: 在 CNN(1) 中, 当 $a_{ij}(t), b_{ij}(t), S_{ij}(t)$ 为常数, $c_{ij}(t) = 0$, 就得到文[7, 8]得结果.

定理 5 如果 CNN(4) 满足

() 存在唯一的平衡点 x^* , 即 $L_i(t) \leq 0, i = 1, 2, \dots, N$;

() $\sum_{j=1}^N A_{ij}(t) < \frac{D}{R}$, 其中 $D \in (0, 1)$ 是常数, $i = 1, 2, \dots, N$;

() $0 \leq S_{ij}(t) \leq S$, 其中 S 为常数, $i, j = 1, 2, \dots, N$;

则 CNN(1) 的平衡点 x^* 是全局一致渐近稳定的.

证明 由定理 4 的证明可知, 式(17)成立. 现证明对 $P \in (t_0, \infty), P \in (t_0, \infty), v = T - T(E, H) > 0, P \in (t_0, \infty)$, 当 $t - t_0 < H$ 时, 有

$$| x_i(t) - x_i^* | < E, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

对 $P \in (t_0 + T, \infty)$ 成立.

选择 $G = \frac{1-D}{4D}E$ 及 $c \in (0, E)$, 使得

$$\int_0^1 K_{ij}(t) dt H F G$$

设 M 是满足 $E + MGE \leq H$ 的最小正整数, 取 $t_k = t_0 + kT^*$, 其中

$$T^* = c + \frac{4D + (1-D)M}{2D(1-D)}RC + 1$$

可以证明, 当 $\|U - x^* + t_0\| < H$ 时, 有

$$\|x_i(t) - x_i^*\| \leq F e^{-(M-k)G} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (18)$$

对 $\forall t \in [k, k+1)$ ($k=0, 1, \dots, M$) 成立.

利用归纳法, 类似于定理 3 可证得式(18)成立, 取 $k=M$ 可知定理 5 成立.

3 结束语

本文建立了具有无穷时滞的变系数连接权细胞神经网络的全局吸引区域, 首先证明了 CNN(1) 的解的有界性, 然后给出了无穷时滞的细胞神经网络在有平衡点时, 平衡点全局渐近稳定和全局一致渐近稳定的充分条件. 其结果推广了文[7, 8]的相应结果.

参考文献:

- [1] L. O. Chua, L. Yang. Cellular neural networks: Theory [J]. IEEE Tran. , Circuits Systems, 198, 35: 1257- 1272.
- [2] L. O. Chua, L. Yang. Cellular neural networks: Applications [J]. IEEE Tran. , Circuits Systems, 1988, 35: 1273- 1290.
- [3] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(I) [J]. 中国科学(A 辑). 1994, 24(9): 902- 910.
- [4] 廖晓昕. 细胞神经网络的数学理论(II) [J]. 中国科学(A 辑). 1994, 24(10): 1037- 1046.

- [5] L. O. Chua, T. Roska. Cellular neural networks with nonlinear and delay-type template elements [A]. In Proc. CNN90 [C], 1990: 12- 25.
- [6] P. P. Civalleri, M. Gilli, L. Pandolfi. On stability of cellular neural networks with delay [J]. IEEE Tran. , Circuits Systems, 1993, 40(3): 157 - 165.
- [7] 卢宏涛, 何振亚. 带时延的细胞神经网络的无条件稳定性 [J]. 电子学报. 1997, 25(1): 1- 4.
- [8] 钟守铭. 具有时滞的细胞神经网络的稳定性 [J]. 电子学报. 1997, 25(2): 125- 127.

作者简介:



钟守铭 1955 年生, 1982 年 1 月毕业于原成都电讯工程学院, 现为电子科技大学应用数学系主任、教授; 研究方向是微分方程稳定性理论及应用、鲁棒控制和神经网络, 已发表科研论文 50 余篇.

黄廷祝 1964 年生, 1990 年毕业于西安交通大学数学系并获硕士学位, 现为电子科技大学教授, 西安交通大学在职博士生; 研究方向是特殊矩阵理论及应用、数字代数及应用, 已发表科研论文 60 余篇.